Borj® Al Aqilm

Rentrée Scolaire
2024-2025

2ème Année Bac BIOF

Lois de newtons et ses Applications.

- Résumé de cours
- Cas d'application

PDF GRATUITE

Préparé par Walid Ramadan

Choix de repère : Un repère terrestre Galiléen (O, x, y) :

1. **L'axe $(\overrightarrow{Ox})$** : Suivant le sens du mouvement du système étudié et passe par son centre d'inertie.
2. **L'axe $(\overrightarrow{Oy})$** : perpendiculaire sur l'axe $(\overrightarrow{Ox})$ et passe par le centre d'inertie du système étudié.

Projection des forces exercées sur le solide sur les axes du repère : (chercher les composantes de chaque force)

Règle N°1 : Une force parallèle - confondue à l'axe ⇒ C'est elle-même.
Règle N°2 : Une force perpendiculaire à l'axe ⇒ égale à zéro
Règle N°3 : Une force n'est ni parallèle ni confondue à l'axe ⇒ sin et cos.

(Sauf la réaction de plan $\vec{R}$)

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Opposé} = \text{المقابل}}{\text{Hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{Adjusant} = \text{المقابل}}{\text{Hypoténuse}}$$

En appliquant ces 3 règles il faut toujours s'assurer si :

- La composante a **le même sens** que l'axe ⇒ $+$
- La composante l'axe ont deux **sens opposé** ⇒ $-$

Le poids $\vec{P}$:

Point d'application : le centre d'inertie du solide.
Direction : verticale
Sens : toujours du haut vers le bas.
Intensité : $P = m \times g$

Réaction du Plan $\vec{R}$:

- Présence d'une surface (Plan) → On a la force $\vec{R}$: Réaction du plan.
- Aucune surface (Plan) → On n'a pas la force $\vec{R}$

Cas de présence d'un plan $\vec{R}$: Réaction du plan

Cas d'absence de frottement → $\vec{R}$: est perpendiculaire au plan	Cas de frottement → $\vec{R}$: est incliné
$\vec{R}: \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = +R_N \end{cases}$ R Intensité : $R = \sqrt{{R_N}^2 + 0^2} = \sqrt{{R_N}^2} = R_N$	$\vec{R}: \begin{cases} R_x = -f \\ R_y = +R_N \end{cases}$ Coefficient de frottement : $k = tg(\varphi) = \frac{f}{R_N}$ Avec φ: l'angle d'inclinaison de $\vec{R}$ R Intensité : $R = \sqrt{{R_N}^2 + f^2}$

Cas d'un mouvement circulaire :

Utilisation du **repère de FREINET** $(\vec{u}; \vec{n})$: avec : $\vec{a}_G : \begin{cases} \mathbf{a_u = a_T = \frac{dV_G}{dt}} \\ \mathbf{a_n = a_N = \frac{V_G^2}{r}} \end{cases}$

Dans le cas particulier du mouvement circulaire uniforme : $\mathbf{V_G = cte}$

donc $\mathbf{a_T = \frac{dV_G}{dt} = 0}$ **donc** $\mathbf{a_N = \frac{V_G^2}{r}}$

Bilan des forces exercées sur le solide S : $\vec{P}$: Son Poids et
$\vec{R}$: Réaction du plan (sans frottement)

Projection sur les deux axes du repère : $\begin{cases} P_u + R_u = ma_T \text{ (sur l'axe } (\vec{u})) \\ P_n + R_n = ma_N \text{ (sur l'axe } (\vec{n})) \end{cases}$

$\vec{P}: \begin{cases} P_u = -P\sin(\alpha) \\ P_n = -P\cos(\alpha) \end{cases}$ et $\vec{R}: \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = +R_N \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -P\sin(\alpha) = m\frac{dV_G}{dt} \rightarrow V_G = \cdots \\ -P\cos(\alpha) + R_N = m\frac{V_G^2}{r} \rightarrow R_N = \cdots \end{cases}$$

Les étapes à suivre pour résoudre un exercice en mécanique :

1. Déterminer le Système étudié : $\{\ldots\}$
2. Bilan des forces exercées sur le système étudié.
   - $\vec{F_1}$:
   - $\vec{F_2}$:
   - $\vec{F_3}$:
3. Dans un plan terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$
$$\vec{F_1} + \vec{F_1} + \vec{F_3} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$$
4. Projection sur les deux axes du repère :
$$\begin{cases} F_{1/x} + F_{2/x} + F_{3/x} = ma_x \ (1) \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Ox})) \\ F_{1/y} + F_{2/y} + F_{3/y} = ma_y \ (2) \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Oy})) \end{cases}$$
5. On cherche les composantes de chaque force : (les 3 règles de projection)
6. On remplace dans les deux relations précédentes.
7. On cherche les composantes de l'accélération $\vec{a}_G: \begin{cases} a_x \\ a_y \end{cases}$

(par intégration et conditions initiales)

8. On déduit les équations horaires de la vitesse : $\vec{V}_G: \begin{cases} V_x(t) \\ V_y(t) \end{cases}$

(par intégration et conditions initiales)

9. On déduit les équations horaires du mouvement : $\overrightarrow{OG}: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$

Remarque :
Si le mouvement est suivant un seul axe : Mouvement rectiligne.

(Horizontal - Vertical - Incliné)

- **Vecteur position $\overrightarrow{OG}$** : Une seule composante
- **Vecteur vitesse $\vec{V}_G$**: Une seule composante
- **Vecteur accélération $\vec{a}_G$** : Une seule composante

Si le mouvement est suivant deux axes : Mouvement plan.

- **Vecteur position $\overrightarrow{OG}$** : les deux composantes.
- **Vecteur vitesse $\vec{V}_G$**: les deux composantes.
- **Vecteur accélération $\vec{a}_G$** : les deux composantes.

Méthode travail :

Système étudié → Bilan des forces → Dans un repère terrestre Galiléen → **Application de la 2ème Loi de Newton** → **Obtenir l'accélération** → Par intégration et conditions initiales → **les équations horaires de la vitesse** → Par intégration et conditions initiales → **les équations horaires du mouvement.**

→ Dans un repère terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème loi de Newton : :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m.\vec{a}_G \Rightarrow \text{Projection sur les deux axes : } \begin{cases} F_{1X} + F_{2X} = ma_x \quad (1) \\ F_{1Y} + F_{2Y} = ma_y \end{cases}$$

Le mouvement se fait suivant l'axe $(\overrightarrow{Ox})$: donc : $a_y = 0$ et $a_G = a_x$

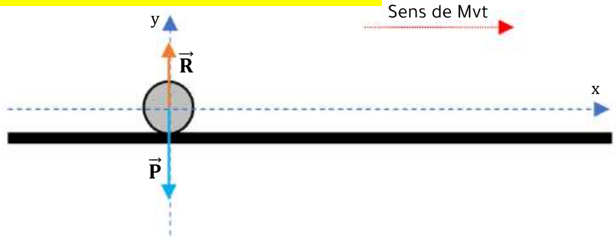
$$(1) \; F_{1X} + F_{2X} = ma_G \Rightarrow a_G = \frac{F_{1X} + F_{2X}}{m}$$

Donc la 1ère information obtenue après l'application de la 2ème loi de Newton est celle de l'accélération : $\mathbf{a_G}$

1ère étape : l'accélération a_G		Questions étape 1
1ère cas : $\mathbf{a_G \neq 0}$	2ème cas : $\mathbf{a_G = 0}$	
La nature du mouvement : Puisque : $\mathbf{a_G \neq 0}$ Donc : **Le mouvement est rectiligne uniformément varié.** → $\mathbf{a_G > 0}$: **uniformément accéléré** → $\mathbf{a_G < 0}$: **uniformément ralenti**	La nature du mouvement : Puisque : $\mathbf{a_G = 0}$ Donc : La vitesse est constante, d'où : **Le mouvement est rectiligne uniforme.**	La nature du mouvement.
2ème étape : les équations horaires de la vitesse V_G		**Questions étape 2**
On sait que : $\mathbf{a_G = \frac{dV_G}{dt}}$ Par intégration et les conditions initiales : $\mathbf{V_G(t) = a_G.t + V_0}$ $\mathbf{a_G}$: Accélération $\mathbf{V_0}$: La vitesse initiale	On sait que : $\mathbf{a_G = \frac{dV_G}{dt}}$ Par intégration et les conditions initiales : $\mathbf{V_G = V_0}$ (Car la vitesse est constante) $\mathbf{V_0}$: La vitesse initiale	**Type 1** : On vous donne l'instant $\mathbf{t_b}$, on vous demande la vitesse à cet instant $\mathbf{V_b}$ **Type 2** : On vous donne la vitesse $\mathbf{V_b}$, on vous demande l'instant $\mathbf{t_b}$
3ème étape : les équations horaires de Mouvement x(t)		**Questions étape 3**
On sait que : $\mathbf{V_G = \frac{dx}{dt}}$ Par intégration et les conditions initiales : $\mathbf{x(t) = \frac{1}{2}a_G.t^2 + V_0.t + x_0}$ $\mathbf{a_G}$: Accélération $\mathbf{V_0}$: La vitesse initiale $\mathbf{x_0}$: Position initiale	On sait que : $\mathbf{V_G = \frac{dx}{dt}}$ Par intégration et les conditions initiales : $\mathbf{x(t) = V_0.t + x_0}$ $\mathbf{V_0}$: La vitesse initiale $\mathbf{x_0}$: Position initiale	**Type 1** : On vous donne l'instant $\mathbf{t_b}$, on vous demande la distance parcourue $\mathbf{x_b}$ **Type 2** : On vous donne la distance parcoure $\mathbf{x_b}$ et on vous demande l'instant $\mathbf{t_b}$

Mouvement rectiligne uniformément varié	Mouvement rectiligne uniforme
Accélération : $\mathbf{a_G \neq 0}$ Vitesse : $\mathbf{V_G(t) = a_G.t + V_0}$ Mouvement : $\mathbf{x(t) = \frac{1}{2}a_G.t^2 + V_0.t + x_0}$	Accélération : $\mathbf{a_G = 0}$ Vitesse : $\mathbf{V_G(t) = V_0}$ Mouvement : $\mathbf{x(t) = V_0.t + x_0}$

Cas N°1 : Plan horizontal sans frottement :



1. Système étudié : {Solide S}
2. Bilan des forces exercées sur le solide S :

   $\vec{P}$: Son Poids et $\vec{R}$: Réaction du plan
3. Dans un plan terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R} = m.\vec{a}_G$
4. Projection sur les deux axes du repère :

$$\begin{cases} P_x + R_x = ma_x \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Ox})) \\ P_y + R_y = ma_y \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Oy})) \end{cases}$$

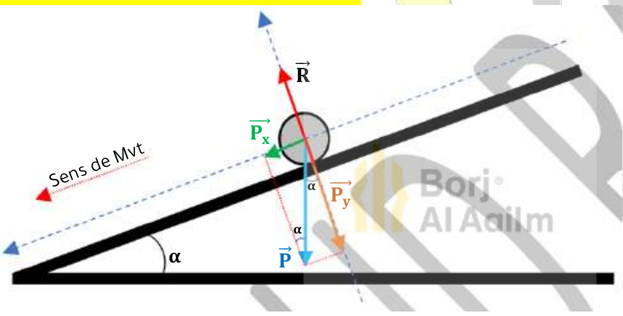
Le mouvement se fait selon l'axe $(\overrightarrow{Ox})$ seulement, donc: $a_y = 0$ et $a_G = a_x$

$$\vec{P}:\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -P \end{cases} \text{ et } \vec{R}:\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = +R_N \end{cases} \text{ et } \begin{cases} P_x + R_x = ma_G \\ P_y + R_y = 0 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} m.a_G = 0 \\ -P + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_G = 0 \\ R_N = P = mg \end{cases}$

$$\begin{cases} a_G = 0 \text{ (Mouvement rectiligne uniforme)} \\ R_N = P = mg \\ R = \sqrt{{R_N}^2 + f^2} = \sqrt{(mg)^2} = mg \end{cases}$$

Cas N°2 : Plan incliné sans frottement :



1. Système étudié : {Solide S}
2. Bilan des forces exercées sur le solide S :

   $\vec{P}$: Son Poids et $\vec{R}$: Réaction du plan
3. Dans un plan terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R} = m.\vec{a}_G$
4. Projection sur les deux axes du repère :

$$\begin{cases} P_x + R_x = ma_x \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Ox})) \\ P_y + R_y = ma_y \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Oy})) \end{cases}$$

Le mouvement se fait selon l'axe $(\overrightarrow{Ox})$ seulement, donc: $a_y = 0$ et $a_G = a_x$

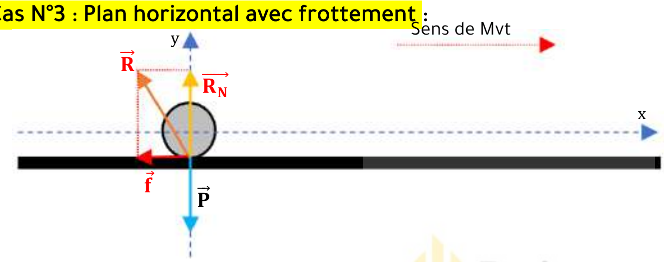
$$\vec{P}:\begin{cases} P_x = +P\sin(\alpha) \\ P_y = -P\cos(\alpha) \end{cases} \text{ et } \vec{R}:\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = +R_N \end{cases} \text{ et } \begin{cases} P_x + R_x = ma_G \\ P_y + R_y = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} P\sin(\alpha) = ma_G \\ -P\cos(\alpha) + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_G = \frac{mg\sin(\alpha)}{m} = g\sin(\alpha) \\ R_N = P\cos(\alpha) = mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_G = g\sin(\alpha) \rightarrow \text{ (Mouvement rectiligne uniformément varié)} \\ R_N = P = mg\cos(\alpha) \\ R = \sqrt{{R_N}^2 + f^2} = \sqrt{(mg\cos(\alpha))^2} = mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

Cas N°3 : Plan horizontal avec frottement :



1. Système étudié : {Solide S}
2. Bilan des forces exercées sur le solide S :

   $\vec{P}$: Son Poids et $\vec{R}$: Réaction du plan
3. Dans un plan terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R} = m.\vec{a}_G$
4. Projection sur les deux axes du repère :

$$\begin{cases} P_x + R_x = ma_x \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Ox})) \\ P_y + R_y = ma_y \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Oy})) \end{cases}$$

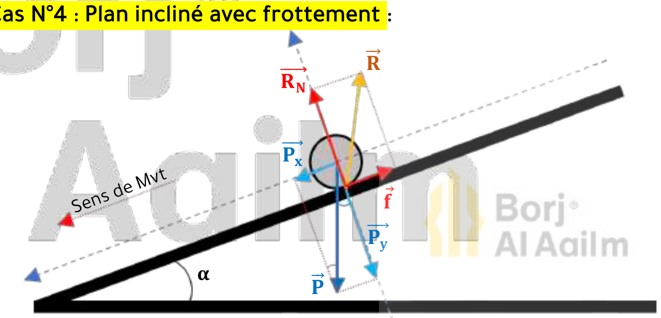
Le mouvement se fait selon l'axe $(\overrightarrow{Ox})$ seulement, donc: $a_y = 0$ et $a_G = a_x$

$$\vec{P}:\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -P \end{cases} \text{ et } \vec{R}:\begin{cases} R_x = -f \\ R_y = +R_N \end{cases} \text{ et } \begin{cases} P_x + R_x = ma_G \\ P_y + R_y = 0 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} -f = m.a_G \\ -P + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_G = \frac{-f}{m} \\ R_N = P = mg \end{cases}$

$$\begin{cases} a_G = \frac{-f}{m} \text{ (Mouvement rectiligne uniformément varié)} \\ R_N = P = mg \\ R = \sqrt{{R_N}^2 + f^2} = \sqrt{(mg)^2 + f^2} \end{cases}$$

Cas N°4 : Plan incliné avec frottement :



1. Système étudié : {Solide S}
2. Bilan des forces exercées sur le solide S :

   $\vec{P}$: Son Poids et. $\vec{R}$: Réaction du plan
3. Dans un plan terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P}+\vec{R} = m.\vec{a}_G$
4. Projection sur les deux axes du repère :

$$\begin{cases} P_x + R_x = ma_x \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Ox})) \\ P_y + R_y = ma_y \text{ (sur l'axe } (\overrightarrow{Oy})) \end{cases}$$

Le mouvement se fait selon l'axe $(\overrightarrow{Ox})$ seulement, donc: $a_y = 0$ et $a_G = a_x$

$$\vec{P}:\begin{cases} P_x = +P\sin(\alpha) \\ P_y = -P\cos(\alpha) \end{cases} \text{ et } \vec{R}:\begin{cases} R_x = -f \\ R_y = +R_N \end{cases} \text{ et } \begin{cases} P_x + R_x = ma_G \\ P_y + R_y = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} P\sin(\alpha) - f = ma_G \\ -P\cos(\alpha) + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_G = \frac{mg\sin(\alpha) - f}{m} = g\sin(\alpha) - \frac{f}{m} \\ R_N = P\cos(\alpha) = mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_G = g\sin(\alpha) - \frac{f}{m} \text{ (Mouvement rectiligne uniformément varié)} \\ R_N = P = mg\cos(\alpha) \\ R = \sqrt{{R_N}^2 + f^2} = \sqrt{(mg\cos(\alpha))^2 + f^2} = mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

Mouvement - Vitesse - Accélération

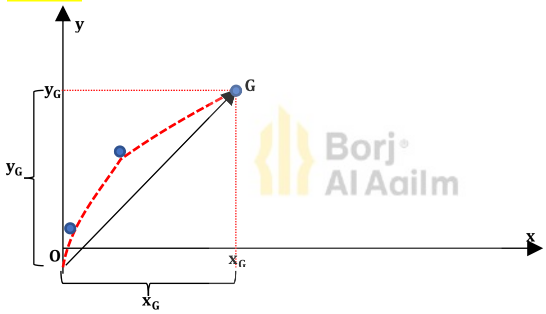
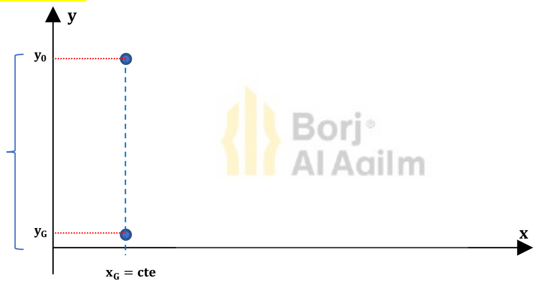
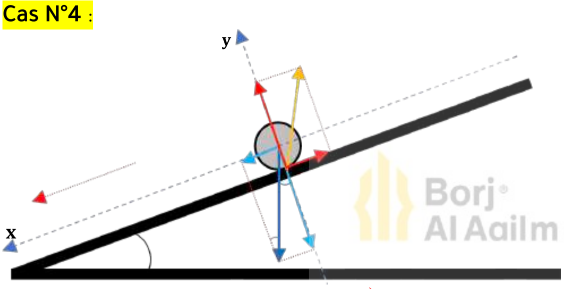
Vecteur position : $\vec{OG}$
Un solide en mouvement change sa position du point O au point G

Vecteur vitesse : $\vec{V_G}$
La vitesse : une variation de mouvement par rapport à une variation de temps :

$$\vec{V_G}=\frac{d\vec{OG}}{dt}$$

Vecteur Accélération : $\vec{a_G}$
L'accélération : une variation de vitesse par rapport à une variation de temps :

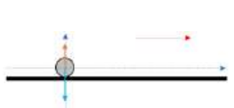
$$\vec{a_G}=\frac{d\vec{V_G}}{dt}$$

Cas N°1  Le mouvement se fait suivant les deux axes (Ox) et (Oy) $\begin{cases} x(t)\longrightarrow V_x\longrightarrow a_x \\ y(t)\longrightarrow V_y\longrightarrow a_y\end{cases}$	**$\vec{OG}$: Vecteur position** La trajectoire du solide est caractérisée par des coordonnées x et y qui varient en fonction de temps. C'est-à-dire, pour déterminer la position du solide il nous faut deux composantes : **x(t) et y(t)** **x** : La distance parcourue suivant l'axe (Ox) **y** : La distance parcourue suivant l'axe (Oy) Donc la position a deux composantes x(t) et y(t) $\vec{OG}:\begin{cases}x(t)=\\y(t)=\end{cases}$ Ou bien on écrit : $\vec{OG}=x(t).\vec{i}+y(t).\vec{j}$ $OG=\sqrt{x^2+y^2}\ \ (m)$	**$\vec{V_G}$: Vecteur vitesse** (Variations de position) $\vec{V_G}=\frac{d\vec{OG}}{dt}$ Puisque : **x:** La distance parcourue suivant l'axe (Ox) **donc on aura une vitesse V_x suivant (Ox)** **y:** La distance parcourue suivant l'axe (Oy) **donc on aura une vitesse V_y suivant (Oy)** Donc la vitesse a deux composantes : V_x et V_y $\vec{V_G}:\begin{cases}V_x=\\V_y=\end{cases}$ Ou bien :$\vec{V_G}=V_x.\vec{i}+V_y.\vec{j}$ $V_G=\sqrt{V_x^2+V_y^2}\ \ (m/s)$	**$\vec{a_G}$: Vecteur accélération** (Variations de vitesse) $\vec{a_G}=\frac{d\vec{V_G}}{dt}$ Puisqu'on a : V_x une vitesse suivant (Ox) : V_y une vitesse suivant (Oy) On aura deux composantes d'accélération : a_x et a_y $\vec{a_G}:\begin{cases}a_x=\\a_y=\end{cases}$ Ou bien : $\vec{a_G}=a_x.\vec{i}+a_y.\vec{j}$ $a_G=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\ \ (m/s^2)$
Cas N°2 :  Le mouvement se fait suivant l'axe (Ox) seulement $\begin{cases} x(t)\longrightarrow V_x\longrightarrow a_x \\ y(t)=cte\end{cases}$	**$\vec{OG}$: Vecteur position** La trajectoire du solide est caractérisée par l'abscisse x qui varie en fonction de temps et y ordonnée constant. **x** : La distance parcourue suivant l'axe (Ox) **y** : constant. $\vec{OG}:\{x(t)$ Seulement x qui varie au fil de temps $OG=\sqrt{x^2}=x$	**$\vec{V_G}$: Vecteur vitesse** (Variations de position) Puisqu'on a une seule composante de mouvement $x(t)$ ⇒ Donc on aura une seule composante de vitesse suivant l'axe (Ox) : V_x $\vec{V_G}:\{V_x$ $V_G=\sqrt{V_x^2}=V_x$	**$\vec{a_G}$: Vecteur accélération** (Variations de vitesse) Et également, on aura une seule composante d'accélération : a_x $\vec{a_G}:\{a_x$ $a_G=\sqrt{a_x^2}=a_x$
Cas N°3 :  Le mouvement se fait suivant l'axe (Oy) seulement $\begin{cases} x=cte \\ y(t)\longrightarrow V_y\longrightarrow a_y\end{cases}$	**$\vec{OG}$: Vecteur position** La trajectoire du solide est caractérisée par l'ordonnée y qui varie en fonction de temps et x abscisse constante. **y** : La distance parcourue suivant l'axe (Oy) **x** : constant. $\vec{OG}:\{y(t)$ Seulement y qui varie au fil de temps $OG=\sqrt{y^2}=y$	**$\vec{V_G}$: Vecteur vitesse** (Variations de position) Puisqu'on a une seule composante de mouvement $y(t)$ ⇒ Donc on aura une seule composante de vitesse suivant l'axe (Oy) : V_y $\vec{V_G}:\{V_y$ $V_G=\sqrt{V_y^2}=V_y$	**$\vec{a_G}$: Vecteur accélération** (Variations de vitesse) Et également, on aura une seule composante d'accélération : a_y $\vec{a_G}:\{a_y$ $a_G=\sqrt{a_y^2}=a_y$
Cas N°4 :  mouvement se fait suivant l'axe (Ox) seulement $\begin{cases} x(t)\longrightarrow V_x\longrightarrow a_x \\ y(t)=cte\end{cases}$	**$\vec{OG}$: Vecteur position** La trajectoire du solide est caractérisée par l'abscisse x qui varie en fonction de temps et y ordonnée constant. **x** : La distance parcourue suivant l'axe (Ox) **y** : constant. $\vec{OG}:\{x(t)$ Seulement x qui varie au fil de temps $OG=\sqrt{x^2}=x$	**$\vec{V_G}$: Vecteur vitesse** (Variations de position) Puisqu'on a une seule composante de mouvement $x(t)$ ⇒ Donc on aura une seule composante de vitesse suivant l'axe (Ox) : V_x $\vec{V_G}:\{V_x$ $V_G=\sqrt{V_x^2}=V_x$	**$\vec{a_G}$: Vecteur accélération** (Variations de vitesse) Et également, on aura une seule composante d'accélération : a_x $\vec{a_G}:\{a_x$ $a_G=\sqrt{a_x^2}=a_x$

Conclusion	L'équation horaire du mouvement :	L'équation horaire de la vitesse :	Accélération :
Mouvement suivant les deux axes $(\overrightarrow{Ox})$ et $(\overrightarrow{Oy})$	$\overrightarrow{OG} : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ On appelle $x(t)$ et $y(t)$ les équations horaires de mouvement. $OG = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\overrightarrow{V_G} : \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_y = \frac{dy}{dt} \end{cases}$ On appelle $V_x(t)$ et $V_y(t)$ les équations horaires de vitesse. $V_G = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2}$	$\overrightarrow{a_G} : \begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} \end{cases}$ $a_G = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$
Mouvement suivant un seul axe : $(\overrightarrow{Ox})$	$OG = x(t)$	$V_G = V_x = \frac{dx}{dt}$	$a_G = a_x = \frac{dV_x}{dt}$
Mouvement suivant un seul axe : $(\overrightarrow{Oy})$	$OG = y(t)$	$V_G = V_y = \frac{dy}{dt}$	$a_G = a_y = \frac{dV_y}{dt}$

La chute verticale

Plan horizontal

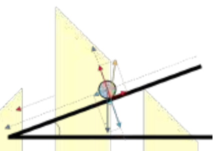


Les forces extérieures

Toujours :
- $\vec{P}$: Poids de solide
- $\vec{R}$: Réaction de plan

Dépends de l'exercice :
- $\vec{F}$: Force Motrice
- $\vec{T}$: tension d'un fil ou d'une cable

Plan Incliné



Les forces extérieures

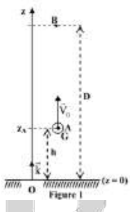
Toujours :
- $\vec{P}$: Poids de solide
- $\vec{R}$: Réaction de plan

Dépends de l'exercice :
- $\vec{F}$: Force Motrice
- $\vec{T}$: tension d'un fil ou d'une cable

$\begin{cases} a_G \neq 0 : \text{Mouvement unif. varié} \\ a_G = 0 : \text{Mouvement uniforme} \end{cases}$

Chute Verticale

Chute Libre

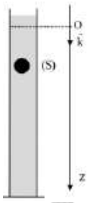


Les forces extérieures

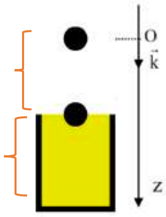
Toujours :
- $\vec{P}$: Poids de solide (Seulement)

L'accélération du centre d'inertie G l'accélération de pesanteur : $\mathbf{a_G = \pm g}$

Chute dans un fluide


Gaz


Liquide



Les forces extérieures

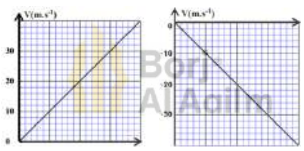
Toujours :
- $\vec{P}$: Poids de solide

Dépends de l'exercice :
- $\vec{f}$: Frottements fluide
- $\vec{F_A}$: Poussée d'Archiméde

On peut distinguer en trois (3) cas :
- 1[er] cas : $\vec{P}$ et $\vec{F_A}$ et $\vec{f}$
- 2[ème] cas : $\vec{P}$ et $\vec{F_A}$
- 3[ème] cas : $\vec{P}$ et $\vec{f}$

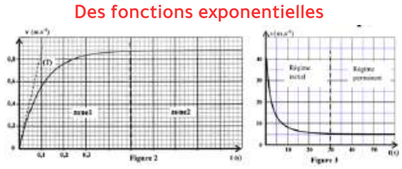
L'accélération du centre d'inertie $\mathbf{G}$ est constante

Des fonctions linéaires et affines



L'accélération est variable : $a(\mathbf{t})$

Des fonctions exponentielles



La chute libre verticale

- Mouvement d'un solide dans le champ de pesanteur uniforme
- Cela veut dire que son accélération est une accélération de pesanteur $\vec{a}_G = \vec{g} \Leftrightarrow a_G = \pm g$
- C'est-à-dire que le solide n'est soumis qu'à son poids $\vec{\mathbf{P}}$ **seulement**
- C'est-à-dire que le solide est en chute libre

Définition de la chute libre : Un solide est en chute libre lorsqu'il est soumis qu'à l'action de son poids $\vec{P}$

Cas n°1 : Une chute vers le bas

L'axe $\overrightarrow{Oz}$ est dirigé vers le bas (même sens de mouvement)
L'origine du repère se coïncide avec la position initiale de la bille

On libère la bile du point A sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 2m$

Le point A est l'origine des dates et de l'espace : $\begin{cases} t_A = t_0 = 0 \\ z_A = z_0 = 0 \end{cases}$

Question 1 : Déterminer l'expression de l'équation différentielle - chercher l'accélération - Déterminer la nature de mouvement

- Système étudié : {la bille}
- Bilan des forces exercées sur la balle :
  $\vec{P}$: Son Poids
- Dans un repère terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton :

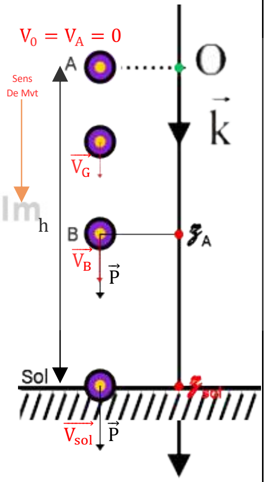
$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

Projection sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$: $P_z = ma_z$

$P_z = +P = mg$ (elle-même et le même sens)

$$mg = ma_z$$

Donc : $a_z = +g$



➢ L'équation différentielle de vitesse V:

On sait que : $a_z = \frac{dV}{dt}$ donc : $\frac{dV}{dt} = g$

➢ L'équation différentielle que vérifie la cote z :

On sait que : $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ donc : $\frac{d^2z}{dt^2} = g$

- **Nature du mouvement :** le mouvement est rectiligne uniformément varié.

Question 2 : Déterminer les expressions des équations horaires de vitesse et de mouvement

- **L'équation horaire de la vitesse :**

On a $a_z = g$ et on sait que : $a_z = \frac{dV}{dt}$,
Par intégration et conditions initiales :

$$v(t) = gt + V_0$$

On lance la balle sans vitesse initiale $V_0 = 0$, donc :

$$v_z(t) = g \times t$$

- **L'équation horaire de mouvement :**

On a : $v(t) = gt$, on sait que $V_z = \frac{dz}{dt}$
Par intégration et conditions initiales

$$z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + V_0 t + z_0$$

A l'instant $t = 0$ le centre d'inertie de la balle est confondu avec l'origine du repère donc : $z_0 = z_A$

$$z(t) = \frac{g}{2}t^2 + z_A$$

Question 3 : Déterminer l'instant d'arrivée de la bille au sol t_{sol}

On a $z(t) = \frac{g}{2}t^2$, au sol on aura : $z_{sol} = \frac{g}{2} \times {t_{sol}}^2$ D'où : $t_{sol} = \sqrt{\frac{2 \times z_{sol}}{g}}$

Lorsque la bille arrive au sol, elle parcourt une distance $z_{sol} - z_A = h = 2m$

$$t_{sol} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Question 4 : Déterminer la vitesse au sol V_{sol}

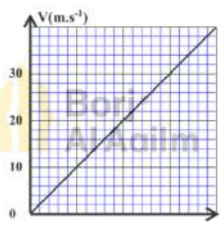
Au sol : la vitesse : $V_{sol} = g \times t_{sol}$

$$V_{sol} = g \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{g^2} \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{g^2 \times \frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} > 0$$

$$V_{sol} = \sqrt{2gh}$$

Représentation su vecteur vitesse $\vec{V_G}$:
$\begin{cases} \text{Point d'application: le centre G} \\ \text{Même sens et direction que le Mvt} \end{cases}$

Remarque : la projection du vecteur vitesse $\vec{V_G}$ dans ce cas a le même sens que l'axe $\overrightarrow{Oz}$, donc $V_G > 0$



Cas n°2 : Une chute vers le bas

L'axe $\overrightarrow{Oz}$ est dirigé vers le haut (sens opposé de mouvement)
L'origine du repère se coïncide avec le sol

On libère la bile du point A sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 2m$

Le point A est l'origine des dates et de l'espace : $\begin{cases} t_A = t_0 = 0 \\ z_A = z_0 = h \end{cases}$

Question 1 : Déterminer l'expression de l'équation différentielle - chercher l'accélération - Déterminer la nature de mouvement

- Système étudié : {la bille}
- Bilan des forces exercées sur la balle :
  $\vec{P}$: Son Poids
- Dans un repère terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton :

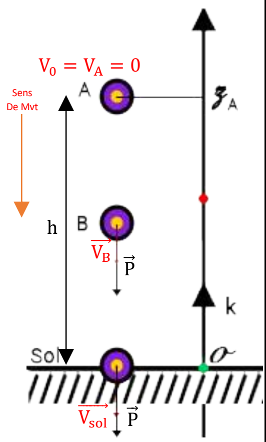
$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$
$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

Projection sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$: $P_z = ma_z$

$P_z = -P = -mg$ (elle-même et de sens opposé)

$$-mg = ma_z$$

Donc : $a_z = -g$



➢ L'équation différentielle de vitesse V:

On sait que : $a_z = \frac{dV}{dt}$ donc : $\frac{dV}{dt} = -g$

➢ L'équation différentielle que vérifie la cote z :

On sait que : $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ donc : $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$

- **Nature du mouvement :** le mouvement est rectiligne uniformément varié.

Question 2 : Déterminer les expressions des équations horaires de vitesse et de mouvement

- **L'équation horaire de la vitesse :**

On a $a_z = -g$ et on sait que : $a_z = \frac{dV}{dt}$,
Par intégration et conditions initiales :

$$v(t) = -gt - V_0$$

On lance la balle sans vitesse initiale $V_0 = 0$, donc :

$$v_z(t) = -g \times t$$

- **L'équation horaire de mouvement :**

On a : $v(t) = -gt$, on sait que $V_z = \frac{dz}{dt}$
Par intégration et conditions initiales

$$z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 - V_0 t + z_0$$

A l'instant $t = 0$ le centre d'inertie de la balle est en point A :

$$z_0 = z_A = h$$

$$z(t) = \frac{-g}{2}t^2 + h$$

Question 3 : Déterminer l'instant d'arrivée de la bille au sol t_{sol}

On a $z(t) = \frac{-g}{2}t^2 + h$, au sol on aura : $z_{sol} = \frac{-g}{2} \times {t_{sol}}^2 + h$

Lorsque la bille arrive au sol, on a : $z_{sol} = 0$ donc : $0 = \frac{-g}{2} \times {t_{sol}}^2 + h$

$$t_{sol} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Question 4 : Déterminer la vitesse au sol V_{sol}

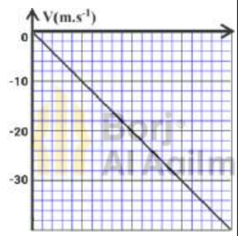
Au sol : la vitesse : $V_{sol} = -g \times t_{sol}$

$$V_{sol} = -g \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{g^2} \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{g^2 \times \frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} < 0$$

$$V_{sol} = -\sqrt{2gh}$$

La norme de vitesse au sol : $V_{sol} = \sqrt{2gh}$

Remarque : la projection du vecteur vitesse $\vec{V_G}$ dans ce cas est de sens opposé que l'axe $\overrightarrow{Oz}$, donc $V_G < 0$



Cas n°3 : Une chute vers le haut

L'axe $\overrightarrow{Oz}$ est dirigé vers le haut (même sens de mouvement)

L'origine du repère se coïncide avec le sol

On lance la bile du point A avec vitesse initiale $V_A = V_0 = 25m/s$ d'une hauteur $h = 1.5m$

Le point A est l'origine des dates et de l'espace : $\begin{cases} t_A = t_0 = 0 \\ \mathbf{z_A = z_0 = h} \end{cases}$

Question 1 : Déterminer l'expression de l'équation différentielle - chercher l'accélération - Déterminer la nature de mouvement

- Système étudié : {la bille}
- Bilan des forces exercées sur la balle :

$\vec{P}$: Son Poids

- Dans un repère terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

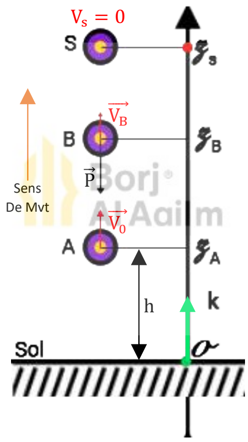
$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

Projection sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$: $P_z = ma_z$

$P_z = -P = -mg$ (elle-même et sens opposé)

$$-mg = ma_z$$

Donc : $\mathbf{a_z = -g}$



➢ L'équation différentielle de vitesse V:

On sait que : $a_z = \frac{dV}{dt}$ donc : $\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-g}$

➢ L'équation différentielle que vérifie la cote z :

On sait que : $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ donc : $\frac{\mathbf{d^2z}}{\mathbf{dt^2}} = \mathbf{-g}$

- **Nature du mouvement :** le mouvement est rectiligne uniformément varié.

Question 2 : Déterminer les expressions des équations horaires de vitesse et de mouvement

- **L'équation horaire de la vitesse :**

On a $a_z = -g$ et on sait que : $a_z = \frac{dV}{dt}$,

Par intégration et conditions initiales :

$$\mathbf{v(t) = -gt + V_0}$$

On lance la balle sans vitesse initiale $V_0 = V_A$, donc :

$$\mathbf{v_z(t) = -gt + V_A}$$

- **L'équation horaire de mouvement :**

On a : $v(t) = -gt + V_0$, on sait que $V_z = \frac{dz}{dt}$ par intégration et conditions initiales

$$\mathbf{z(t) = \frac{1}{2}a_zt^2 + V_0t + z_0}$$

A l'instant $t = 0$ le centre d'inertie de la balle est en point A :

$$\mathbf{z_0 = z_A = h}$$

$$\mathbf{z(t) = \frac{-g}{2}t^2 + V_0t + h}$$

Question 3 : Déterminer l'instant d'arrivée de la bille au sommet : t_s

On a $v(t) = -gt + V_0$ au sommet : $V_s = -gt_s + V_0$

Sachant que la vitesse au sommet s'annule : $\mathbf{V_s = 0}$

$$0 = -gt_s + V_0 \longrightarrow g \times t_s = V_0 \longrightarrow \mathbf{t_s = \frac{V_0}{g}}$$

Question 4 : Déterminer la hauteur de la bille à partir du sol

Cherchons $\mathbf{z_{sommet}}$: on a $z(t) = \frac{-g}{2}t^2 + V_0t + h$

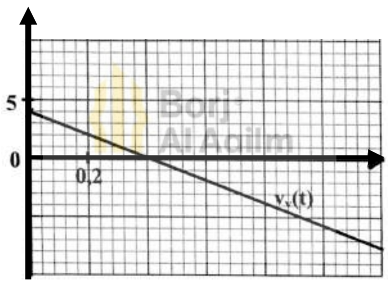
$$z_{sommet} = \frac{-g}{2}t_s{}^2 + V_0t_s + h$$

$$z_{sommet} = \frac{-g}{2}\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0\left(\frac{V_0}{g}\right) + h$$

$$z_{sommet} = \frac{-g}{2}\frac{V_0{}^2}{g^2} + \frac{V_0{}^2}{g} + h$$

$$z_{sommet} = \frac{-V_0{}^2}{2g} + \frac{2V_0{}^2}{2g} + h$$

$$z_{sommet} = \frac{V_0{}^2}{2g} + h$$



Cas n°4 : Une chute vers le haut

L'axe $\overrightarrow{Oz}$ est dirigé vers le haut (même sens de mouvement)

L'origine du repère se coïncide avec la position initiale de la bille

On lance la bile du point A avec vitesse initiale $V_A = V_0 = 25m/s$ d'une hauteur $h = 1.5m$

Le point A est l'origine des dates et de l'espace : $\begin{cases} t_A = t_0 = 0 \\ \mathbf{z_A = z_0 = 0} \end{cases}$

Question 1 : Déterminer l'expression de l'équation différentielle - chercher l'accélération - Déterminer la nature de mouvement

- Système étudié : {la bille}
- Bilan des forces exercées sur la balle :

$\vec{P}$: Son Poids

- Dans un repère terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

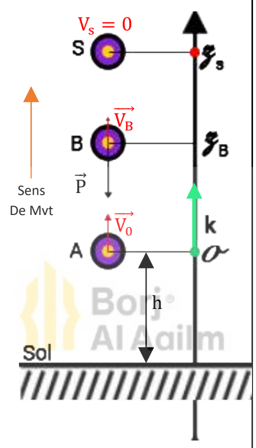
$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

Projection sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$: $P_z = ma_z$

$P_z = -P = -mg$ (elle-même et sens opposé)

$$-mg = ma_z$$

Donc : $\mathbf{a_z = -g}$



➢ L'équation différentielle de vitesse V:

On sait que : $a_z = \frac{dV}{dt}$ donc : $\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{-g}$

➢ L'équation différentielle que vérifie la cote z :

On sait que : $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ donc : $\frac{\mathbf{d^2z}}{\mathbf{dt^2}} = \mathbf{-g}$

- **Nature du mouvement :** le mouvement est rectiligne uniformément varié.

Question 2 : Déterminer les expressions des équations horaires de vitesse et de mouvement

- **L'équation horaire de la vitesse :**

On a $a_z = -g$ et on sait que : $a_z = \frac{dV}{dt}$,

Par intégration et conditions initiales :

$$\mathbf{v(t) = -gt + V_0}$$

On lance la balle sans vitesse initiale $V_0 = V_A$, donc :

$$\mathbf{v_z(t) = -gt + V_A}$$

- **L'équation horaire de mouvement :**

On a : $v(t) = -gt + V_0$, on sait que $V_z = \frac{dz}{dt}$

Par intégration et conditions initiales

$$\mathbf{z(t) = \frac{1}{2}a_zt^2 + V_0t + z_0}$$

A l'instant $t = 0$ le centre d'inertie de la balle est en point A :

$$\mathbf{z_0 = z_A = 0}$$

$$\mathbf{z(t) = \frac{-g}{2}t^2 + V_0t + z_A}$$

Question 3 : Déterminer l'instant d'arrivée de la bille au sommet : t_s

On a $v(t) = -gt + V_0$ au sommet : $V_s = -gt_s + V_0$

Sachant que la vitesse au sommet s'annule : $\mathbf{V_s = 0}$

$$0 = -gt_s + V_0 \longrightarrow g \times t_s = V_0 \longrightarrow \mathbf{t_s = \frac{V_0}{g}}$$

Question 4 : Déterminer la hauteur de la bille à partir du sol

Cherchons $\mathbf{z_{sommet}}$: on a $z(t) = \frac{-g}{2}t^2 + V_0t + z_A$

$$z_s - z_A = \frac{-g}{2}t_s{}^2 + V_0t_s$$

$$z_s - z_A = \frac{-g}{2}\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0\left(\frac{V_0}{g}\right)$$

$$z_s - z_A = \frac{-g}{2}\frac{V_0{}^2}{g^2} + \frac{V_0{}^2}{g}$$

$$z_s - z_A = \frac{-V_0{}^2}{2g} + \frac{2V_0{}^2}{2g}$$

$AS = \frac{V_0{}^2}{2g} \longrightarrow$ **La hauteur de la bille à partir du sol : $h' = AS + h$**

Suite du 4ème cas :

Lorsque la bille arrive au sommet (au point S), elle commence à se diriger vers le bas en direction du sol.

On choisit comme nouvelle origine des dates et d'espace, la position de la bille en point S.

Déterminer la norme de la vitesse du centre d'inertie G de la bille lorsqu'elle arrive au sol.

Le point A est l'origine des dates et de l'espace : $\begin{cases} t_B = t_0 = 0 \\ \mathbf{z_B = z_0 = AS} \end{cases}$

Lorsque la bille est en point B, elle commence son mouvement sans vitesse initiale car $V_S = V_0 = 0$, Donc : $\begin{cases} a_z = -g \\ v_z(t) = -gt \\ z(t) = \frac{-g}{2}t^2 + AS \end{cases}$

La vitesse au sol : $v_{sol} = -gt_{sol}$, Cherchons t_{sol} :

On a $z_{sol} = \frac{-g}{2}{t_{sol}}^2 + AS$ donc : $z_{sol} - AS = \frac{-g}{2}{t_{sol}}^2$

$$-h - AS = \frac{-g}{2}{t_{sol}}^2$$

$$h + AS = \frac{g}{2}{t_{sol}}^2$$

$$\mathbf{t_{sol} = \sqrt{\frac{2(h + AS)}{g}}}$$

Puisque : $v_{sol} = -gt_{sol}$

$$v_{sol} = -g \times \sqrt{\frac{2(h + AS)}{g}}$$

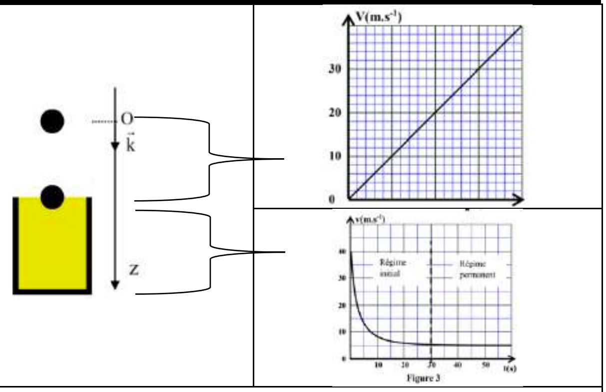
$$v_{sol} = -\sqrt{g^2} \times \sqrt{\frac{2(h + AS)}{g}}$$

$$v_{sol} = -\sqrt{g^2 \times \frac{2(h + AS)}{g}}$$

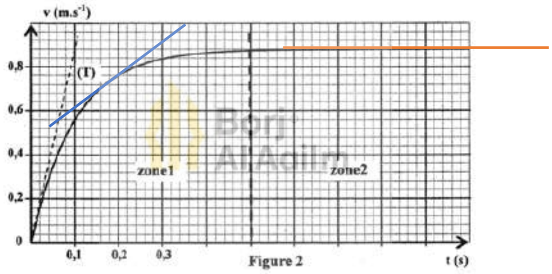
$$\mathbf{v_{sol} = -\sqrt{2g(h + AS)}}$$

La norme de la vitesse du centre d'inertie G de la bille lorsqu'elle arrive au sol : $\|v_{sol}\| = \sqrt{2g(h + AS)}$

La chute verticale dans un Fluide (Liquide visqueux ou gaz):



A l'instant $t = 0$, Le solide est mis sur la surface du fluide, et libéré sans vitesse initiale.



La vitesse est une fonction croissante $V(t) = V_{lim}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

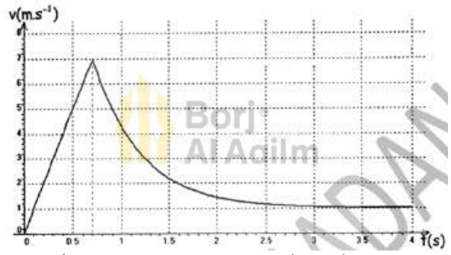
$V_0 = 0 \longrightarrow V \uparrow \longrightarrow$ la vitesse devient limite et constante

On traverse deux régimes : Transitoire et Permanant

Accélération : $a_0 = a_{max} \longrightarrow a \downarrow$ (mais positive) $\longrightarrow$ l'accélération devient nulle : $a(t) = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Remarque : On sait que $a_G = \frac{dV_G}{dt}$: Dérivée graphiquement $\longrightarrow$ Tangentes

A l'instant $t = 0$, Le solide est mis d'une hauteur h de la surface du fluide, puis libéré sans vitesse initiale



Le mouvement passe par deux phase :

Phase 1 : Le solide est en chute libre **(Accélération constante)**

$a_G = \pm g \longrightarrow$ Vitesse croissante

Phase 2 : Le solide est en chute dans un fluide. **(Accélération variable)**

Lorsque le solide arrive à la surface de fuilde, son mouvement est friené, la vitesse diminuer jusqu'à l'arrivée au régime permanant ou la vitesse devient constante

La vitesse est une fonction décroissante : $V(t) = V_{max}.e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{lim}$

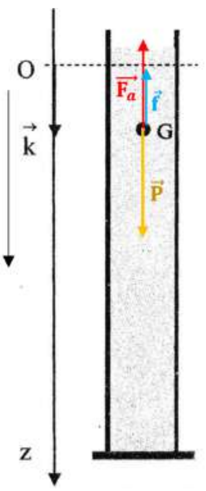
Accélération : $a_0 = a_{max} \longrightarrow a \downarrow$ (mais négative) $\longrightarrow$ l'accélération devient nulle :

$$a(t) = \frac{-V_{max}}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Les forces appliquées sur la balle

$\vec{P}$: Son Poids $\rightarrow$ Intensité: $P = mg$	$\vec{f}$: forces de frottements fluide	$\vec{F_a}$: Poussée d'Archimède
Sens : Toujours : verticale du haut vers le bas. Intensité : $P = mg$	Sens : Toujours : Sens opposé du sens de mouvement. Intensité : $f = k \times v^n$ ▪ k : Constante positive (dépend de dimensions de la balle et la visqueusité de fluide) ▪ v^n : Vitesse de la balle, avec $n = 1$ ou $n = 2$	Sens : Toujours vers le haut. $F_a = m_f \times g$ Avec m_f : masse du fluide tel que $m_f = \rho_f \times V_{solide}$ Intensité : $F_a = \rho_f . V_{solide} . g$ ▪ ρ_{fluide}: La masse volumique du fluide ▪ V_{solide}: Volume du solide ▪ g: Intensité de pesanteur.

Trouver l'équation différentielle de la vitesse - Montrer que l'équation différentielle s'écrit comme : $\frac{dv}{dt} + Av = B$



Bilan des forces exercées sur la balle :

- $\vec{P}$: Son poids
- $\vec{f}$: Force de Frottements - fluide
- $\vec{F_a}$: Poussée d'Archimède

Dans un plan terrestre supposé Galiléen on applique la 2ème Loi de Newton :

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a_G} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F_a} + \vec{f} = m\vec{a_G}$$

Projection sur l'axe $\vec{Oy}$:

$$P_y + F_{ay} + f_y = ma_y$$

Avec :

$P_y = +mg$ (Elle-même, le même sens)

$F_{ay} = -\rho_f . V_s . g$ (Elle-même, sens opposé)

$f_y = -k . v^n$ (Elle-même, sens opposé)

Donc :

$$m_{solide} . g - \rho_f . V_s . g - k . v^n = m_{solide} . a_y$$

$$a_y = g - \frac{\rho_f . V_s . g}{m_s} - \frac{k}{m_s} . v^n$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho_f . V_s . g}{m_s} - \frac{k}{m_s} . v^n$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_s} \times v^n = g - \frac{\rho_f . V_s . g}{m_s}$$

(si données : ρ_f et V_{solide})	(si données : ρ_f et ρ_s)
	$\rho_{solide} = \frac{m_s}{V_s} \rightarrow m_s = \rho_s . V_s$ $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_s} \times v^n = g\left(1 - \frac{\rho_f . V_s}{\rho_s . V_s}\right)$
$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_s} \times v^n = g\left(1 - \frac{\rho_f . V_s}{m_s}\right)$	$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_s} \times v^n = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right)$
On pose $\begin{cases} A = \frac{k}{m_s} \\ B = g\left(1 - \frac{\rho_f . V_{solide}}{m_s}\right) \end{cases}$	On pose $\begin{cases} A = \frac{k}{m_s} \\ B = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_f}\right) \end{cases}$

Dans tous les cas : $\frac{dv}{dt} + A \times v^n = B$

L'équation différentielle peut être :

$\frac{dv}{dt} + A \times v = B$ ou $\frac{dv}{dt} + A \times v^2 = B$

Cas de $n = 1$

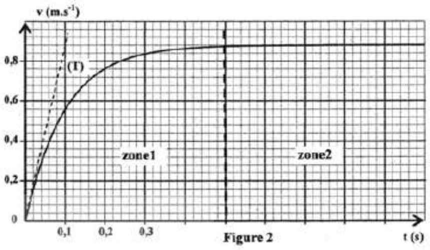
L'équation différentielle devient : $\frac{dv}{dt} + A \times v = B$

La solution de l'équation différentielle : $v(t) = v_{lim}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Avec v_{lim} et τ des constantes à déteminer.

Pour trouver les expressions de v_{lim} et τ on calcule $\frac{dv}{dt}$ et on remplace dans l'expression de l'éq.différentielle. $\Rightarrow v_{lim} = \frac{B}{A}$ et $\tau = \frac{1}{A}$

$$V(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{B}{A}(1 - e^{-A.t})$$



Déterminations des vitesses (V_0, V_{lim}, V_t)

Déterminons V_0 : La vitesse initiale

Comment ? Donnée ; la solution ; graphe

- **Donnée d'exercice** : on sait à l'avance que la vitesse initiale est nulle
- **La solution** $V(t) = \frac{B}{A}(1 - e^{-A.t})$

  A l'instant $t = 0$: $V_0 = \frac{B}{A}(1 - e^{0}) \Rightarrow V_0 = 0$
- **Graphe** : $V_0 = 0$

Déterminons V_t : La vitesse à instant donné

Comment ? la solution ; Graphe ; Méthode d'Euler

- **La solution** $V(t) = \frac{B}{A}(1 - e^{-A.t})$

  A l'instant $t_1 = 0.2s$: $V_1 = \frac{B}{A}(1 - e^{-A.0,2})$
- **Graphe** : A l'instant $t_1 = 0.2s$: $V_1 = 0,56 m/s$

Remarque : si l'exercice ne propose pas la solution et qu'on veut calculer V_1, V_2, V_3 ... on utilise la méthode d'Euler

Déterminons V_{lim} : La vitesse limite (au Régime permanant)

Comment ? la solution ; l'équation différentielle ; Graphe

- **La solution** $V(t) = \frac{B}{A}(1 - e^{-A.t})$

  A régime permanant : $t_1 \longrightarrow \infty$: $V_{lim} = \frac{B}{A}(1 - e^{-A.\infty})$

  $$V_{lim} = \frac{B}{A}(1 - 0)$$

  $$V_{lim} = \frac{B}{A}$$
- **Graphe** : au régime permanant : $V_{lim} = 0,88 m/s$
- **L'équation différentielle** :

  On a : $\frac{dv}{dt} + A \times v = B$

  au **régime permanant, la vitesse devient limite et constante** :

  $$\frac{dV_{lim}}{dt} + A \times V_{lim} = B$$

  $$A \times V_{lim} = B$$

  $$V_{lim} = \frac{B}{A}$$

Déterminations des accélérations (a_0, a_P, a_t)

Déterminons a_0 : L'accélération initiale

Comment ? la solution ; graphe , équation différentielle(M, Euler)

- **Graphiquement** : On sait que $a_G = \frac{dV_G}{dt}$ donc : $a_0 = \left(\frac{dV_G}{dt}\right)_0$

  C'est la tangente de la courbe de vitesse à l'instant $t = 0$

  $$a_0 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0,88 - 0}{0,1 - 0} = \frac{V_{lim} - 0}{\tau - 0} = 8,8 m/s^2$$
- **La solution** $V(t) = \frac{B}{A}(1 - e^{-A.t})$

  On sait que $a_G = \frac{dV_G}{dt}$ donc : $a(t) = B.e^{-A.t}$

  à l'instant $t = 0$: $a_0 = B.e^{0} = B$
- **Équation différentielle (M, Euler)**: $\frac{dv}{dt} + A \times v = B$

  à l'instant $t = 0$: $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 + A \times v_0 = B$ avec $v_0 = 0$

  $$\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = B$$

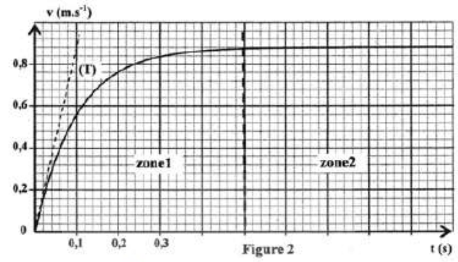
  $$a_0 = B$$

Déterminons a_t : L'accélération à un instant donné

Comment ? la solution ; graphe , équation différentielle(M, Euler)

- **Graphiquement** : On sait que $a_G = \frac{dV_G}{dt}$ donc : $a_1 = \left(\frac{dV_G}{dt}\right)_1$

  C'est la tangente de la courbe de vitesse à l'instant a_1



  $$a_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{deux points de la tangente à } t_1$$
- **La solution** : $a(t) = B.e^{-A.t}$

  à l'instant t_1 : $a_1 = B.e^{-A.t_1}$
- **Équation différentielle** : $\frac{dv}{dt} + A \times v = B$

  à l'instant t_1 : $\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 + A.v_1 = B$

  $$a_1 = B - A.v_1$$

  avec $v_1 =$ graphiquement ou donnée

Déterminons a_P : L'accélération à un instant donné

Comment ? la solution ; graphe , équation différentielle(M, Euler)

- **Graphiquement** : On sait que $a_G = \frac{dV_G}{dt}$ donc : $a_P = \left(\frac{dV_G}{dt}\right)_P$

  C'est la tangente de la courbe de vitesse au régime permanant (horizontale) :

  $$a_P = 0$$
- **La solution** : $a(t) = B.e^{-A.t}$

  au régime permanant : $a_P = B.e^{-A.\infty} = B \times 0 = 0$
- **Équation différentielle** : $\frac{dv}{dt} + A \times v = B$

  au régime permanant : $\left(\frac{dv}{dt}\right)_P + A.v_P = B$

  $$a_P = B - A.v_{lim} \text{ avec } V_{lim} = \frac{B}{A}$$

  $$a_P = B - A.\frac{B}{A} = B - B = 0$$

Cas de $n = 2$

L'équation différentielle devient : $\frac{dv}{dt} + A \times v^2 = B$

Déterminations des vitesses (V_0, V_{lim})

Déterminons V_0 : La vitesse initiale

Donnée d'exercice : on sait à l'avance que la vitesse initiale est nulle

Déterminons V_t : La vitesse à instant donné

Comment ? Méthode d'Euler

Déterminons V_{lim} : La vitesse limite (au Régime permanant)

Comment ? L'équation différentielle

On a : $\frac{dv}{dt} + A \times v^2 = B$ au régime permanant, la vitesse devient limite et constante :

$$\frac{dv_{lim}}{dt} + A \times v_{lim}^2 = B \text{ Avec : } \frac{dv_{lim}}{dt} = 0$$

$$\text{Donc : } A \times v_{lim}^2 = B$$

$$v_{lim}^2 = \frac{B}{A}$$

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

Déterminations des accélérations (a_0)

Déterminons a_0 : L'accélération initiale

Comment ? équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + A \times v^2 = B$$

À l'instant $t = 0$: $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 + A \times {v_0}^2 = B$ avec $v_0 = 0$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = B$$

$$a_0 = B$$

Méthode d'Euler pour calculer les vitesses et les accélérations aux différents instants :

Cas de $n = 2$ l'équation différentielle par la méthode d'Euler

La 1ère relation, déjà démontrer dans l'exercice, c'est l'équation différentielle précédemment déterminée :

$\frac{dv}{dt} + Av^n = B$ Donc : $a_i + Av_i^n = B$ d'où $a_i = B - Av_i^n \ (1)$

On sait que : $a_i = \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t}$ donc : $a_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t}$ d'où : $V_{i+1} = a_i \times \Delta t + v_i \ (2)$

$$\begin{cases} a_i = B - A \times v_i^n \\ V_{i+1} = a_i \times \Delta t + v_i \end{cases}$$

En utilisant la méthode d'Euler et les données du tableau suivant, calculer la valeur approchée de a_3 et celle de v_4 .

Figure 2

t (s)	v_G (m.s^{-1})	a_G (m.s^{-2})
⋮	⋮	⋮
0,015	0,126	a_3
0,020	v_4	6,28
0,025	0,192	5,70

Question : Par l'analyse dimensionnelle, déterminer la dimension - l'unité de la constante k dans le système international des unités

Cas 1

Les forces de frottements : $f = k \times v^2$

$f = k \times v^2 \Rightarrow k = \frac{f}{v^2}$

$$[k] = \frac{[f]}{[v]^2}$$

- Déterminons la dimension de la vitesse v:

On sait que : $v = \frac{d}{t}$ donc : $[v] = \frac{L}{T}$

- Déterminons la dimension de l'intensité f :

D'après la 2ème loi de Newton $f = m \times g$ donc :

$$[f] = [m] \times [a]$$

$$[f] = [m] \times [a] = M \times \frac{L}{T^2}$$

D'où :

$$[k] = \frac{M \times \frac{L}{T^2}}{\left(\frac{L}{T}\right)^2} = M \times \frac{L}{T^2} \times \frac{T^2}{L^2} = \frac{M}{L} = M \times L^{-1}$$

D'où l'unité de k est : $Kg.m^{-1}$

Cas 2

Les forces de frottements : $f = k \times v$

$f = k \times v \Rightarrow k = \frac{f}{v}$

$$[k] = \frac{[f]}{[v]}$$

- Déterminons la dimension de la vitesse v :

On sait que : $v = \frac{d}{t}$ donc : $[v] = \frac{L}{T}$

- Déterminons la dimension de l'intensité f :

D'après la 2ème loi de Newton $f = m \times g$ donc

$$[f] = [m] \times [a]$$

$$[f] = [m] \times [a] = M \times \frac{L}{T^2}$$

D'où :

$$[k] = \frac{[f]}{[v]} = \frac{M \times \frac{L}{T^2}}{\frac{L}{T}} = M \times \frac{L}{T^2} \times \frac{T}{L} = \frac{M}{T} = M \times T^{-1}$$

D'où l'unité de k est : $Kg.s^{-1}$